1

حل معادله دیفرانسیل $y''+25y=f(t)$ با استفاده از سری فوریه عادی و مختلط

$$f(t)=\begin{cases} 1 & 0<t<\pi \\ 0 & \pi<t<2\pi \end{cases}$$

حل - الف) با روش فوریه معمولی

ابتدا تابع $f(t)$ را بسط فوریه می دهیم:

$\tau=0$

$2L=2\pi \Rightarrow L=\pi$

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right)+b_n\sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right)$$

$$a_n=\frac{1}{L}\int_{\tau}^{\tau+2L} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}\,dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos\frac{n\pi t}{\pi}\,dt=\frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi}\cos nt\,dt\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\times\frac{1}{n}\sin nt\Big|_0^{\pi}=0$$

$$a_0=\frac{1}{L}\int_{\tau}^{\tau+2L} f(t)\,dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} dt=1$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin nt\,dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nt\,dt=\frac{-1}{\pi}\times\frac{1}{n}\cos nt\Big|_0^{\pi}=-\frac{1}{\pi n}\left[\cos n\pi-\cos 0\right]$$

$$=-\frac{1}{\pi n}\left[(-1)^n-1\right]=\frac{1}{\pi n}\left[1-(-1)^n\right]=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi n} & n \text{ فرد} \\ 0 & n \text{ زوج}\end{cases}$$

$$\Rightarrow f(t)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin[(2n-1)t]}{2n-1}$$

حال به حل معادله دیفرانسیل می پردازیم معادله یک حل عمومی و یک حل خصوصی خواهد داشت:

$$y=\underbrace{y_H}_{\text{حل معادله همگن}}+\underbrace{y_p}_{\text{حل خصوصی}}$$

$$y_H=A\sin 5t+B\cos 5t$$

حل خصوصی باید حلی باشد که در معادله دیفرانسیل صدق کند یعنی

$$y_p'' + 25y_p = f(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin[(2n-1)t]}{2n-1}$$

برای حل این معادله می‌توان از روش ضرایب نامعین استفاده نمود. چون سمت راست معادله دیفرانسیل ترمهای سینوسی و کسینوسی دارد بایستی حل مورد نظر نیز ترمهای سینوسی و کسینوسی داشته باشد یعنی

فرم کلی حل خصوصی:

$$y_p = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos[(2n-1)t] + b_n\sin[(2n-1)t]$$

پس از جایگذاری این معادله در معادله دیفرانسیل:

$$y_p'' + 25y_p = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin[(2n-1)t]}{2n-1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} -(2n-1)^2\left\{a_n\cos[(2n-1)t] + b_n\sin[(2n-1)t]\right\}$$

$$+ \frac{25a_0}{2} + 25\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos[(2n-1)t] + b_n\sin[(2n-1)t] = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin[(2n-1)t]}{2n-1}$$

پس از مرتب کردن معادله:

$$\frac{25a_0}{2} - \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{-(2n-1)^2 + 25\right\}a_n\cos[(2n-1)t]$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\left\{-(2n-1)^2 b_n + 25b_n - \frac{2}{\pi(2n-1)}\right\}\sin[(2n-1)t] = 0$$

بایستی برای تمام مقادیر t این معادله صادق باشد پس

$$\frac{25a_0}{2} - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow a_0 = \frac{1}{25}$$

$$a_n = 0, \qquad b_n = \frac{2}{\pi(2n-1)\left[25-(2n-1)^2\right]}$$

③

می‌بینیم که به ازای $n=3$ ، b_n موجود نمی‌باشد پس به ازای $n=3$ باید جواب را جداگانه بدست آوریم. حل کل را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$y_p = \frac{a_0}{2} + b_1 \sin t + b_2 \sin 3t + y(t) + b_4 \sin 7t + \dots$$

باید این حل در معادله دیفرانسیل $y_p'' + 25y_p = f(t)$ صدق کند. اگر جایگذاری کنیم خواهیم دید که تمام ضرایب حذف می‌شوند و معادله زیر حاصل می‌شود:

$$y'' + 25y = \frac{2}{\pi}\,\frac{\sin 5t}{5}$$

این معادله را باید حل کنیم تا جواب به ازای $n=3$ حاصل شود. می‌توان معادله را به روش ضرایب نامعین حل نمود. چون $\sin 5t$ حل معادله همگن است پس باید y فرضی به شکل زیر داشته باشد:

$$y = c_1 t \cos 5t + c_2 t \sin 5t$$

$$y'' = -10c_1 \sin 5t + 10c_2 \cos 5t - 25c_1 t \cos 5t - 25c_2 t \sin 5t$$

$$y'' + 25y = \frac{2}{5\pi}\sin 5t \Rightarrow c_2 = 0, \quad c_1 = -\frac{1}{25\pi} \Rightarrow y = -\frac{1}{25\pi} t \cos 5t$$

پس حل کل به صورت زیر خواهد بود:

$$y(t) = A \sin 5t + B \cos 5t + \frac{1}{50} - \frac{1}{25\pi} t \cos 5t + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq 3}}^{\infty} \frac{2}{\pi}\,\frac{\sin[(2n-1)t]}{(2n-1)[25-(2n-1)^2]}$$

④

ب

حل با روش سری فوریه مختلط .

ابتدا تابع $f(t)$ را بسط فوریه مختلط می‌دهیم ،

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i w_n t}$$

$$c_n=\frac{1}{2L}\int_{\tau}^{\tau+2L} f(t)\, e^{-i w_n t}\, dt \,,\qquad w_n=\frac{n\pi}{L}=n \qquad \tau=0 \qquad L=\pi$$

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-int}\, dt=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} e^{-int}\, dt=\dots=\frac{-i\left[1-(-1)^n\right]}{2\pi n}=\begin{cases}0 & n \text{ زوج}\\ \frac{-i}{\pi n} & n \text{ فرد}\end{cases}$$

دیده می‌شود که به ازای $n=0$ ، c_n مبهم است می‌بایست c_0 را بایستی جداگانه حساب کنیم ،

$$c_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} dt=\frac{1}{2} \Rightarrow f(t)=\frac{1}{2}-\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{i\, e^{i(2n-1)t}}{\pi(2n-1)}$$

پس

$$y''+25y=\frac{1}{2}-\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{i\, e^{i(2n-1)t}}{\pi(2n-1)}$$

$$y_H=A e^{5it}+B e^{-5it}$$

به روش ضرایب نامعین $y_p=c_0+\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i(2n-1)t}$

$$y_p''=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} -(2n-1)^2 c_n e^{i(2n-1)t}$$

$$y_p''+25y_p=\frac{1}{2}-\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{i\, e^{i(2n-1)t}}{\pi(2n-1)}$$

$$\Rightarrow 25c_0+\sum\left[25-(2n-1)^2\right]c_n e^{i(2n-1)t}=\frac{1}{2}-\sum\frac{i\, e^{i(2n-1)t}}{\pi(2n-1)}$$

5

$$25c_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{c_0 = \frac{1}{50}} \qquad c_n = \frac{-i}{\pi(2n-1)\left[25-(2n-1)^2\right]}$$

می‌بینیم که به ازای $n=3$ و $n=-2$ ، C_n نامعین است پس حل به ازای $n=3$ و $n=-2$ بایستی جداگانه بدست آید:

$$y_p = \frac{1}{50} + c_{-2}te^{-5it} + c_3te^{5it} - \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq -2,3}}^{+\infty} \frac{ie^{i(2n-1)t}}{\pi(2n-1)\left[25-(2n-1)^2\right]}$$

به روش ضرایب نامعین

با توجه به اینکه غیر از جملات C مثل c_{-2} و c_3 ، جملات دیگر تشابه در معادله دیفرانسیل صدق داشته‌اند پس اگر

$$Y_p = c_{-2}te^{-5it} + c_3te^{5it}$$

فرض شود Y_p نیز در معادله بایستی صادق باشد. یعنی

$$Y_p'' + 25Y_p = \frac{ie^{-5it}}{-5\pi} + \frac{ie^{5it}}{5\pi}$$

با مشتق‌گیری و جایگذاری می‌توان ضرایب c_{-2} و c_3 را به صورت زیر بدست آورد:

$$c_{-2} = \frac{i}{50\pi}, \quad c_3 = \frac{i}{50\pi}$$

پس حل به صورت زیر خواهد بود:

$$y = Ae^{5it} + Be^{-5it} + \frac{1}{50} + \frac{i}{50\pi}te^{-5it} + \frac{i}{50\pi}te^{5it}$$

$$- \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq -2,3}}^{+\infty} \frac{ie^{i(2n-1)t}}{\pi(2n-1)\left[25-(2n-1)^2\right]}$$